

03 الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية، الدوال اللوغاريتمية.

تتدخل الدوال الأسية في مجالات عديدة علمية، اقتصادية و اجتماعية و يتم استعمالها لنمذجة الظواهر التي تكون فيها نسبة التغير $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ متناسبة مع y كما تسمح في الإحصاء من التعبير عن القوانين الأساسية.

زمن فاعلية دواء

حينما نحقن مريضا بمضاد حيوي فإن الكمية المحقونة A للدواء تتناقص مع مرور الزمن t وفق الدالة f حيث:

$$f(t) = Ae^{-\frac{t}{24}}$$

1) ما كمية الدواء المتبقية في الدم بعد مرور 8 ساعات ؟
2) لأسباب صحية تعطى كل 8 ساعات حقنة واحدة. مثّل بيانيا كمية الدواء في دم المريض خلال 72 ساعة.
3) تبدأ فاعلية الدواء حينما تبلغ كميته في الدم 2,2A . متى تبلغ هذه الحالة ؟
4) عندما تبلغ الكمية 3,65A يصبح الدواء خطرا على صحة المريض. هل الوتيرة السابقة في إعطاء الحقن تشكل خطرا على المريض ؟
5) بعد أسبوع من العلاج تقرر إعطاء الحقن كل 24 ساعة. مثّل بيانيا التغيرات الجديدة لكمية الدواء في الدم لمدة أسبوع ابتداء من هذا التغيير.

لن تجد أية صعوبة في نهاية الفصل للإجابة عن الأسئلة السابقة.

نشاط أول

مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f'. سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

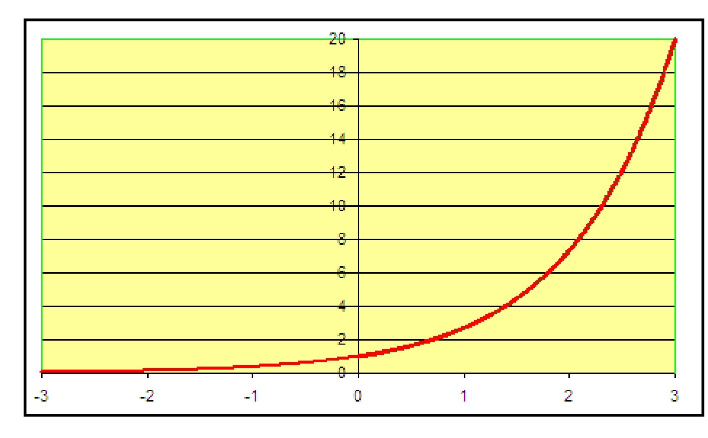
فرضية: نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين:

$$f'=f \quad (1) \qquad \text{و} \qquad f(0)=1 \quad (2)$$

1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0,005$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لِـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f.

نذكر أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h)\approx f(x_0)-hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$



h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,005	0	1	0	1
	-0,01	0,995	0,01	1,005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,061677812
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $h(x)=f(x)f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)f(-x)=1 \quad (3)$
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0 \quad (4)$

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$. بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

- بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

4) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

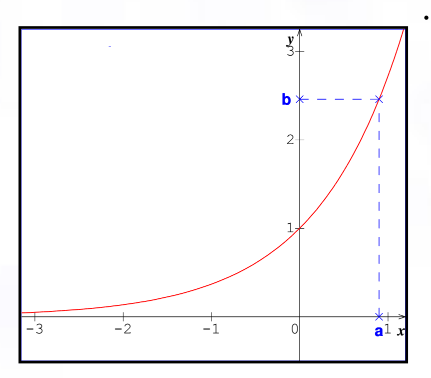
- بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y) \quad (5)$
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)} \quad (6)$

5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

- عين الدالة المشتقة للدالة j .
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$ $\quad (7)$

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية).
و نرمز إليها بالرمز " exp ".
من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)$

6) أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ... ، (7).



نشاط ثان

الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a=b$.
بوضع $a=\ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " و نرمز إليها بالرمز " ln ".

1) حساب بعض الصور

- أحسب الأعداد التالية: $\ln(1)$، $\ln(e)$، $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ و $\ln(e^2)$.
- عين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$.
- بين أن $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2) التمثيل البياني

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " exp " و " ln ".

- ماذا يمكن القول عن النقطتين $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ حيث x، y عددان حقيقيان.
- a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب تماما. بين أن النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحنى (C').
- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟
- أرسم المنحنى (C) ثم المنحنى (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) وضع تخمينات

- خمن اتجاه تغير الدالة " ln " على المجال $]0;+\infty[$.
- خمن نهايتي الدالة " ln " عند 0 و عند $+\infty$.

الدالة الأسية

1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.
نرمز إلى هذه الدالة بالرمز" exp " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2. خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

(4) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. (5) $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$.

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x

- العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.
- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـِ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

تقرأ e^x: " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$
- $\exp'(x)=e^x$
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أن الدالة f فردية.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2. $$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$$

و منه $$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.

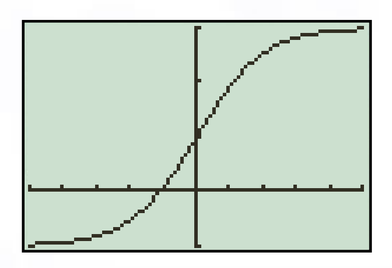
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}-1$

الحل: ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

1. $f(-x)+f(x)=\frac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{3-e^x}{1+e^x}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=\frac{2(e^x+1)}{e^x+1}$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.



2. $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}-1=\frac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$.

الدرس

الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.
توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ و $f(0)=1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{kx}$.
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=ke^{kx}=kf(x)$ كما أن $f(0)=e^0=1$.
و بالتالي الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$.

الوحدانية: نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$،
$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{kg(x)f(x)-kf(x)g(x)}{[f(x)]^2}=0$. إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$ مع
$h(0)=\dfrac{g(0)}{e^0}=1$. و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)=1$. إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

2. دوال تحول المجموع إلى جداء

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$
هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

البرهان:

لتكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: من أجل كل x، y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y)$
بأخذ $x=0$ و $y=0$ نحصل على $f(0)=[f(0)]^2$ أي $f(0)[1-f(0)]=0$ أي $f(0)=0$ أو $f(0)=1$.
إذا كان $f(0)=0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=f(x)\times 0=0$ مما يعني أن f معدومة و هذا مرفوض و بالتالي $f(0)=1$.
من أجل كل y ثابت، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y)$. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x+y)=f'(x)f(y)$. من أجل $x=0$ لدينا: $f'(y)=f'(0)f(y)$
بوضع $k=f'(0)$ يكون لدينا من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f'(y)=kf(y)$. إذن $f'=kf$ و $f(0)=1$
و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=e^{kx}$.

عكسيا: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{kx}$. باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:
من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=e^{k(x+y)}=e^{kx+ky}=e^{kx}\times e^{ky}=f(x)f(y)$

تمرين محلول:

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ هي الدوال: $x \mapsto Ce^{kx}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.

1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة.
2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$.
3. من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$.

الحل:

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=C\times ke^{kx}=k\left(Ce^{kx}\right)=kf(x)$ و منه $f'=kf$.

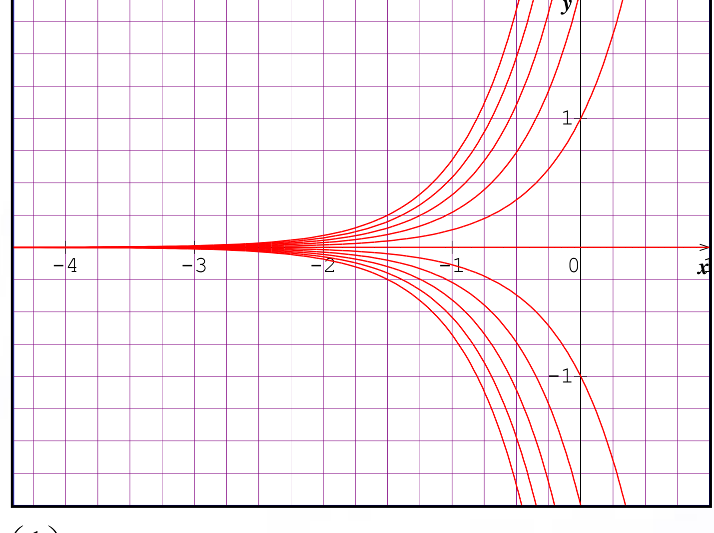
__عكسيا__ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$

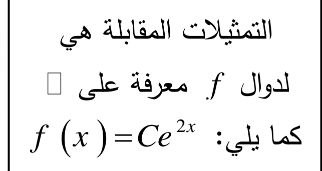
الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^{kx}-kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}}=0$

و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x)=C$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x)=g(x)e^{kx}$ يكون لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=Ce^{kx}$.

2. $f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.





3. نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$

يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه $f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$.

إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة:

$$x \mapsto e^{2x+1}$$

↲دراسة الدالة الأسية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x > 0$.

البرهان: من أجل كل x من □، $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من □، $e^x > 0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على □.

البرهان: من أجل كل x من □، $\exp'(x) = e^x$ و منه من أجل كل x من □، $\exp'(x) > 0$.

نتائج:
- من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a < b$ و $e^a = e^b$ يعني $a = b$.
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$.

2. النهايات

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

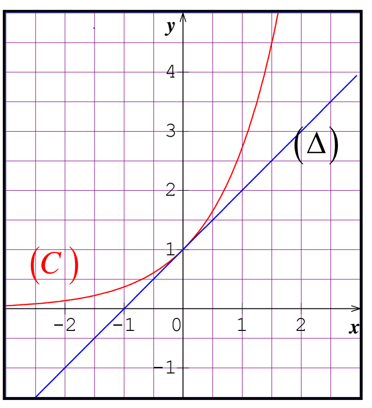
البرهان:

□ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ $f(x) = e^x - x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x) = e^x - 1$.
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x \geq 1$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0) = 1$.
إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$ أي $e^x \geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

□ من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\right)$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

3. جدول تغيرات – التمثيل البياني

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$\exp'(x)$	+
e^x	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$



- المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0) = 1$ و $e^0 = 1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta): y = x + 1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0) = 1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1 + x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1 + x$.

تمرين محلول1: حل في ℝ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}+3=0$ (1) $\quad e^{-2x+1}-1=0$ (2) $\quad e^{-2x-1}-e^{x}<0$ (3) $\quad e^{2x}>2-e^{x}$ (4)

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في ℝ لأن من أجل كل x من ℝ، $e^{2x}>0$.إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 و منه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في ℝ.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ: $f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

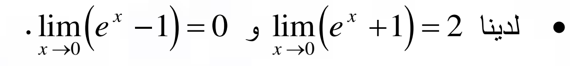
1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل: 1)

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و منه $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=-1$ إذن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(1+e^{-x})}{e^{x}(1-e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.



- لدينا $\lim_{x\to 0}(e^{x}+1)=2$ و $\lim_{x\to 0}(e^{x}-1)=0$.

نعلم أن $e^{x}<1$ يعني $x<0$ و $e^{x}>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$.

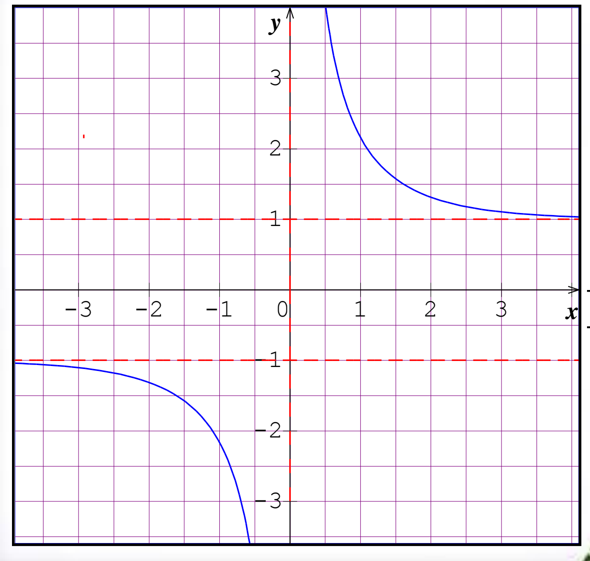
يقبل المنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$.



دراسة الدالة $\exp \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim_{x \to -\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X \to +\infty} e^{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x \to -\infty} e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim_{x \to +\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X \to -\infty} e^{X}=0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x+2}=0$ أي $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$.

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp \circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp \circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp \circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{2+\ln x}$

أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to -\infty} e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to 0} e^{2+\ln x}=0$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

- لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty} e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{2+\ln x}=+\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=e^{2+\ln x}=e^{2}e^{\ln x}=e^{2}x$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(e^{2x}+1)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2. عين نقط المنحنى (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{3}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

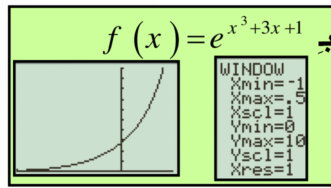
بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\dfrac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\dfrac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

تمرين محلول3: المنحنى المرسوم على الحاسبة هو للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^3+3x+1}$



1. خمن عدد حلول المعادلة $f(x)=2$.

2. اثبت صحة تخمينك معينا حصرا للحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1. يظهر و أن للمعادلة $f(x)=2$ حلا.

2. * الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3(x^2+1)e^{x^3+3x+1}$

و بما أن $3(x^2+1)>0$ و $e^{x^3+3x+1}>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. لدينا $f(-1)=e^{-3}\approx 0{,}5$ و $f(0)=e\approx 2{,}71$. نلاحظ أن $f(-1)<2<f(0)$. إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين -1 و 0. تعطينا الحاسبة $-0{,}11<\alpha<-0{,}10$.

ـــ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b=a$.
يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b=2$ هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة " ln "

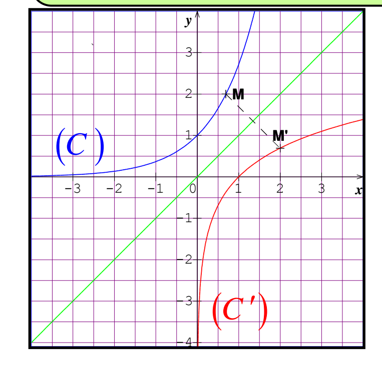
تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز" ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x=e^y$ يعني $y=\ln x$.
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\ln\left(e^x\right)=x$.
4. بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ و بما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$.

ملاحظة: نعبر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " exp".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأول).



البرهان: نرمز بـ (C) إلى منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ و بـ (C') إلى منحنى الدالة $x\mapsto \ln x$.
بما أن $y=e^x$ يعني $x=\ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C) يعني أن النقطة $M'(y;x)$ تنتمي إلى (C').
و بما أن $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.

3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0;+\infty[$ حيث $a<b$. $a<b$ يعني $e^{\ln a}<e^{\ln b}$ و بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a<\ln b$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$.
2. $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$.
3. $\ln a>0$ يعني $a>1$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$ كما أن $\ln 1=0$.

تمرين محلول1: عين مجموعتي تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$g(x)=\ln(x^2)$ و $f(x)=\ln(x+1)$

طريقة: يكون لِـ $\ln a$ معنى إذا و فقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تماما.

الحل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1>0$ أي $x>-1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]-1;+\infty[$.
- تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\ln(2x-1)=2$ (1) $\ln(x-1)\geq -3$ (2) $\ln(x+2)\leq 5$ (3)

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln[u(x)]=p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln[u(x)]<p$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<e^p$).

الحل:

1. لدينا $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$
2. لدينا $D=]1;+\infty[$. (2) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$
3. لدينا $D=]-2;+\infty[$. (3) تعني $x+2\leq e^5$ أي $x\leq e^5-2$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]-2;e^5-2]$

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\ln(x^2-1)=\ln(x)$ (1) $\ln(x^2-1)\leq\ln(x)$ (2)

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

الحل:

1. تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x>0$ و منه $D=]1;+\infty[$.

(1) تعني $x^2-1=x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D . و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]1;+\infty[$. لدينا (2) تعني $x^2-x-1\leq 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\leq 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

↲ الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. نضع $\alpha=\ln(ab)$ و نضع $\beta=\ln a+\ln b$ و بالتالي:
$e^{\alpha}=ab$ و $e^{\beta}=e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$. إذن $e^{\alpha}=e^{\beta}$ و منه $\alpha=\beta$ أي $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

2. نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

* من أجل a من $]0;+\infty[$، $a\times\frac{1}{a}=1$ و منه $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=0$ أي $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

* من أجل a و b من $]0;+\infty[$، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:
من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2، ...، a_n من $]0;+\infty[$، $\ln(a_1a_2..a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\ln(a^n)=n\ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي.
نميز الحالات التالية:

1. الحالة الأولى: $n\geq 0$
نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n)=n\ln a$.
- من أجل $n=0$ لدينا: $\ln(a^0)=\ln(1)=0=0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.
- فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n\geq 0$ أي $\ln(a^n)=n\ln a$.
- وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0: نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln a$. لدينا:
$\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\times a)=\ln(a^n)+\ln a=n\ln a+\ln a=(n+1)\ln a$ و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln(a^n)=n\ln a$.

2. الحالة الثانية: $n<0$
$\ln(a^n)=\ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$ لأن $-n>0$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0;+\infty[$، $\ln a=\ln\left[(\sqrt{a})^2\right]=2\ln(\sqrt{a})$ و منه $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

تمرين محلول1: حل المعادلتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2 \quad (1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2 \quad (2)$

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{2\}$.

تمرين محلول2: حل المتراجحتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)\le 2\ln 2 \quad (1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)\le 2\ln 2 \quad (2)$

طريقة: لمعاينة حلول متراجحة يمكنك استعمال محور.

الحل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.

مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=[-3;-2[\cup]1;2]$

−3 −2 1 2

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)\le\ln 4$ أي $x^2+x-6\le 0$.

مجموع الحلول هي $[-3;2]\cap D=]1;2]$

−3 −2 1 2

تمرين محلول3: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2+b\ln(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\ln x$. نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

الحل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\ln x=-2$ تعني $x=e^{-2}$ و $\ln x=\frac{3}{2}$ تعني $x=e^{\frac{3}{2}}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{e^{-2};e^{\frac{3}{2}}\right\}$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \quad (2)$$

البرهان:

- ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و منه إذا كان x عددا حقيقيا يحقق $x>e^{A}$ فإن $\ln x>A$ و هكذا فإن المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. و هذا يعني أن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
- من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نضع $X=\frac{1}{x}$ و منه $\ln X=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$. لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}X=+\infty$

  و من النتيجة (1) لدينا: $\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن $\lim_{x\to 0}\ln x=\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$.

2. الاستمرارية و الاشتقاقية

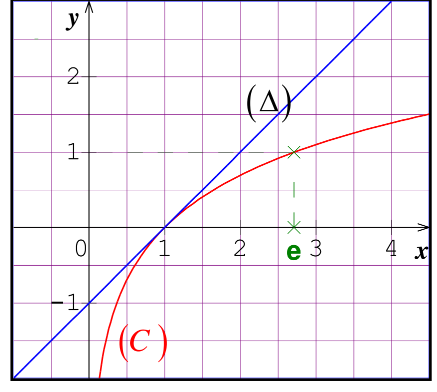
خواص: الدالة " $\ln$ " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

البرهان:

- نقبل بدون برهان أن الدالة " $\ln$ " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{\ln x}$. f هي مركب الدالة " $\ln$ " متبوعة بالدالة " $\exp$ " فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln x}$ و بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x}=x$ فإن $f'(x)=\ln'(x)\times x$ من جهة و $f'(x)=1$ $(f(x)=x)$ من جهة ثانية. نستنتج هكذا أن $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

3. جدول تغيرات الدالة " $\ln$ "

x	0 1 $+\infty$
$\ln'(x)$	‖ $+$
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$



- المنحنى (C) الممثل للدالة " $\ln$ " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y=x-1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\ln'(1)=1$ إذن $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ أو $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

نتيجة: الدالة $h\mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto\ln(1+h)$ بجوار 0.

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h)\approx h$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

2. عين الدالة f'.أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل:

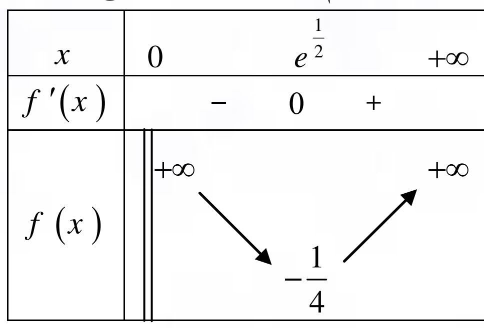
1. نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)=+\infty$.

لدينا $f(x)=\ln x\left[(\ln x)-1\right]$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. بما أن الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$. بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2\ln x-1)$. لدينا $2\ln x-1\geq0$ تعني $\ln x\geq\frac{1}{2}$ أي $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

- من أجل كل x من $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$، $f'(x)\leq0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.
- من أجل كل x من $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$، $f'(x)\geq0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f.

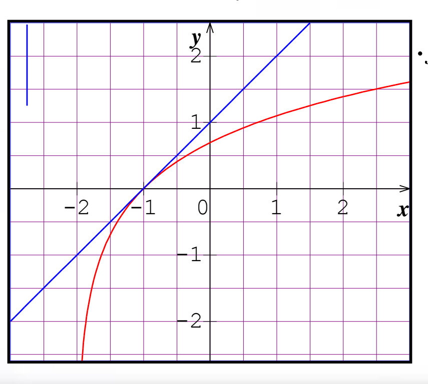


x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

x	$f(x)$
$-0,5$	
1	
e	
3	
4	
5	

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x+2)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$. أرسم (C_f) وهذا المماس.



الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لِ $(\Delta):y=x$ لما يكون $f'(x)=1$ أي $\frac{1}{x+2}=1$ و منه $x=-1$ مع $f(-1)=0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1;0)$ هي: $y=x+1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة" $\ln$ "بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

دالة اللوغاريتم العشري

1. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

2. خواص

خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log(ab) = \log a + \log b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. لدينا:

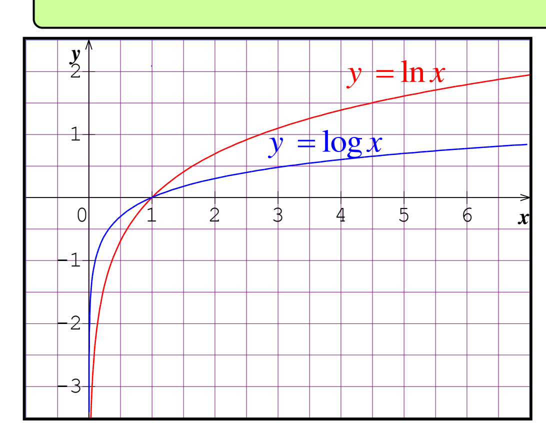
$$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.
2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(a^n) = n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(10^n) = n$ لأن $\log 10 = 1$.

خاصية2: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين " $\log$ " و " $\ln$ " نفس اتجاه التغيرات. و بما أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة " $\log$ " انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " $\ln$ ".

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3{,}87 \times 10^7$.

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة:

لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

تمرين محلول1: نعتبر العدد الطبيعي n حيث: $n=3^{10518}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.
2. استنتج الحصر التالي: $10^{5018}\le n<10^{5019}$.
3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n.

الحل:

قدرة ذاكرة الحاسبات لا تسمح باعتبار أعداد كبيرة جدا بقدر العدد n.

1. لدينا $\log\left(3^{10518}\right)=10518\log 3$. تعطي الحاسبة:
$E\left(10518\log 3\right)=5018$.
2. من $E\left(\log n\right)=5018$ نستنتج الحصر: $5018\le \log n<5019$
و يمكن كتابة هذا الحصر كما يلي: $\log\left(10^{5018}\right)\le \log n<\log\left(10^{5019}\right)$
و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $10^{5018}\le n<10^{5019}$.
3. يثبت الحصر السابق أن الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 5019 رقما.

تمرين محلول2: التركيز المولي (المولارية) بشوارد H^+ لمحلول و الذي نرمز إليه بـ $\left[H^+\right]$ هو عدد مولات H^+ في 1 لتر من هذا المحلول. نعبر غالبا عن هذا التركيز بأس عشري سالب: $\left[H^+\right]=10^{-pH}$ إلا أنه يفضل استعمال pH المعرف بالعلاقة: $pH=-\log\left[H^+\right]$.

1. ما قيمة pH محلول يحتوي على $5\times 10^{-8}\, moles$ من شوارد H^+ في اللتر الواحد ؟
2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل $\left(pH=7\right)$ ؟

الحل:

1. لدينا $\left[H^+\right]=5\times 10^{-8}$ و منه $pH=-\log\left[5\times 10^{-8}\right]$ أي $pH=-\left[\log 5+\log\left(10^{-8}\right)\right]$
و بالتالي: $pH=-\log 5+8$. نجد هكذا: $pH\approx 7{,}3$.
2. $\left(pH=7\right)$ يعني $-\log\left[H^+\right]=7$ أي $\log\left[H^+\right]=-7$ و منه $\left[H^+\right]=10^{-7}\, moles$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\log x=2\ \ (1)$ $\qquad$ $\log x\le -4\ \ (2)$ $\qquad$ $\log x>3\ \ (3)$

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.
$\log x=2$ تعني $\log x=\log\left(10^2\right)$ أي $x=10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left\{10^2\right\}$.
2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.
$\log x\le -4$ تعني $\log x\le \log\left(10^{-4}\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$
فإن $x\le 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left]0;10^{-4}\right]$.
3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.
$\log x>3$ تعني $\log x>\log\left(10^3\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $x>10^3$.
إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left]10^3;+\infty\right[$.

دراسة الدالة $\ln \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على I و علما ان الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة المركبة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x)=u'(x)\times(\ln)'[u(x)]=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}$

أي من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال: * مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

* مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln(e^x+1)$ هي $g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بِـ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim_{X\to 2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim_{x\to 1}\ln(x^2+1)=\ln 2$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{x\to 1}\ln(x^2-1)=-\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim_{x\to 1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

- $\lim_{x\to +\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim_{X\to 1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بِـ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$

2. عين معادلة لِـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

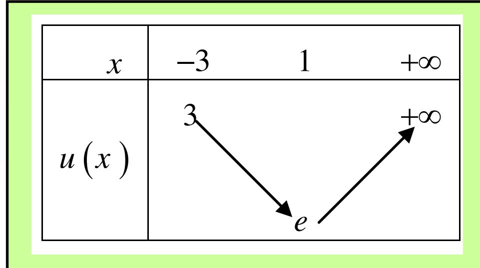
الحل:

1.من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=1+3\times\frac{2}{2x-1}=\frac{2x+5}{2x-1}$.

2.لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta): y=7x-6$.

تمرين محلول3: جدول التغيرات المقابل هو دالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-3;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln[u(x)]$



x	-3	1	$+\infty$
$u(x)$	3 ↘	e	↗ $+\infty$

الحل: نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $[-3;+\infty[$، $u(x)\geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $[-3;+\infty[$. إذن للدالتين u و $f=\ln\circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3)=\ln[u(-3)]=\ln 3$ و $f(1)=\ln[u(1)]=\ln e=1$.

بما أن $\lim_{x\to +\infty}u(x)=+\infty$

فإن $\lim_{x\to +\infty}\ln[u(x)]=+\infty$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$ ↘	1	↗ $+\infty$

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال ℝ كما يلي:

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

نرمز بِـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال ℝ كما يلي:

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بِـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

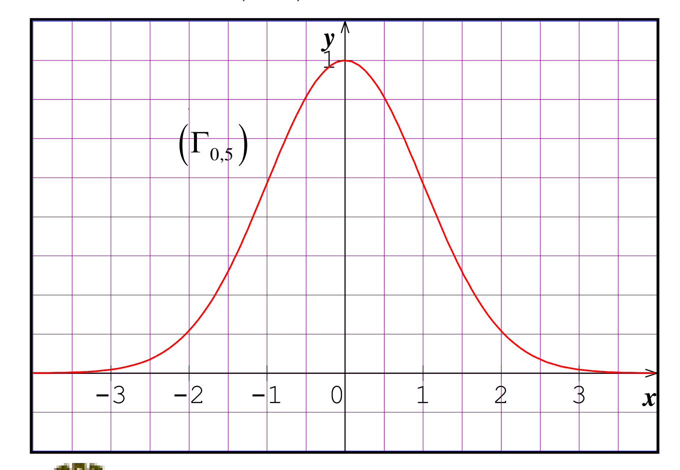
1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

ملاحظة: تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص $(Gauss)$ و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء

و لعل أكثرها استعمالا هو المنحنى $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ و الذي يأخذ شكلا ناقوسيا.



كارل فريديريك غوص
1777 م – 1855 م



◆ المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو تعيين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = af(x) + b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$.

ملاحظة: العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك تؤدي إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما نكتبها على الشكل: $\dfrac{dy}{dx} = ay + b$

1. المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

> **مبرهنة:** a عدد حقيقي غير معدوم.
> الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\quad y' = ay$ حيث $a \neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية (E).
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $h(x) = e^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة.استنتج أن $g(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 0$.

2. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$

> **مبرهنة:** a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم.
> الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E')\quad y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E').
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E'). لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $h(x) = g(x) + \dfrac{b}{a}$
  - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x) = ah(x)$.
  - استنتج من مبرهنة الجزء1 عبارة $h(x)$ و من ثم عبارة $g(x)$.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$.

> **خاصية:** من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0; y_0)$، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0) = y_0$.

البرهان: إذا كانت $f(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ بين أن $C = e^{-ax_0}\left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)$.

تطبيق: نعتبر المعادلة التفاضلية $(1)\quad 2y' + y = 1$

1. حل المعادلة (1).
2. عين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(-1) = 2$.
3. أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم في معلم متعامد و متجانس تمثيلها البياني.



دالتا تجب و جيب الزائديتان

تعريف: نسمي الدالة تجب الزائدية و الدالة جيب الزائدية الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ و اللتين نرمز إليهما على التوالي بِـ ch و sh حيث:

$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

1. دراسة الدالة ch

- بين أن الدالة ch دالة زوجية.
- أدرس نهاية الدالة ch عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة ch على المجال $[0;+\infty[$.شكل جدول تغيراتها.

2. دراسة الدالة sh

- بين أن الدالة sh دالة فردية.
- أدرس نهاية الدالة sh عند $+\infty$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة sh على المجال $[0;+\infty[$.شكل جدول تغيراتها.

3. التمثيلات البيانية

ليكن، في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$، (C_c) و (C_s) التمثيلين البيانيين للدالتين ch و sh على الترتيب.

- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_c) و (C_s).
- أدرس نهاية الدالة $f: x \mapsto ch(x)-sh(x)$ عند $+\infty$. ما ذا تستنتج ؟

تعريف: القول عن منحنيين (C_f) و (C_g) ممثلين على التوالي لدالتين f و g أنهما متقاربان عند $+\infty$ $(-\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0\right)$.

- أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_c) و (C_s).

4. دساتير

- بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$ch(a+b)=ch(a)ch(b)+sh(a)sh(b)$$
$$sh(a+b)=sh(a)ch(b)+sh(b)ch(a)$$

- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$ch(2a)=ch^{2}(a)+sh^{2}(a) \quad \text{و} \quad sh(2a)=2sh(a)ch(a)$$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch^{2}(a)-sh^{2}(a)=1$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a)=2ch^{2}(a)-1$
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $ch(2a)=2sh^{2}(a)+1$

التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنيها البياني (C) انطلاقا من التمثيل البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم أرسم (C).

أ) $f(x)=1+\ln x$ ب) $g(x)=-\ln x$

جـ) $h(x)=\ln(x+2)$ د) $k(x)=1+\ln(x-1)$

2. نعتبر الدالتين φ و ψ المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\ln(|x|) \qquad \text{و} \qquad \psi(x)=|\ln(|x|)|$$

نرمز إلى منحنييهما البيانيين على التوالي بـ (C_φ) و (C_ψ).

- بين أن المنحنى (C_φ) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب ثم أرسمه.
- أرسم المنحنى (C_ψ) انطلاقا من المنحنى (C_φ).

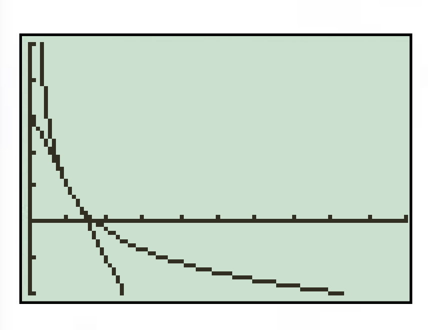
دراسة دالة تتضمن عبارتها اللوغاريتم النيبيري

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$$

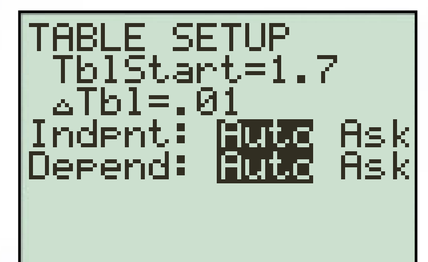
و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α. تحقق أن $1<\alpha<2$.
4. باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد α سعته $0,01$.
5. ليكن (Δ) مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.
   - عين معادلة للمماس (Δ) و أكتبها على الشكل: $y=ax+b$.
   - أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-(ax+b)$.
   - استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (Δ).
6. ارسم المماس (Δ) و المنحنى (C).



X	Y1
1.73	.02991
1.74	.02083
1.75	.01181
1.76	.00287
1.77	-.006
1.78	-.0148
1.79	-.0236

X=1.79



موضوع محلول

تمرين : بكالوريا

I. f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(1+x)-x \quad \text{و} \quad g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

1. ادرس تغيرات كل f و g على $[0;+\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$

و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n-\frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جـ- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n \leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ "

• بين إذن أن: $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$. استنتج حصرا لـ ℓ.

حل مختصر

I. 1. لدينا $f'(x)=\frac{-x}{1+x}$ ، الدالة f متناقصة على $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$ ، و منه f سالبة ، من جهة أخرى $g'(x)=\frac{x^2}{1+x}$ ، إذن الدالة g متزايدة على $[0;+\infty[$ و $g(0)=0$ ، ومنه g موجبة

2. من f سالبة نستنتج أن $\ln(1+x) \leq x$ و من g موجبة نستنتج أن:

$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ و بالتالي $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. 3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$

و $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^3} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^3}\right) \leq \frac{1}{2^3}$ ،... $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

بجمع هذه المتباينات طرفا إلى طرف نحصل على $S_n-\frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

4. $S_n=1-\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=\frac{1}{3}$

5. أ- $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ و منه (u_n) متزايدة تماما.

ب- $\ln u_n \leq S_n$ و منه $u_n \leq e^{S_n}$ و لكن S_n محدودة من الأعلى بـ 1 بالتالي $u_n \leq e$

إذن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو نهاية ℓ.

جـ ℓ موجب و $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln \ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و منه $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ أي $e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq 1$

تعاليق

• f' سالبة على $[0;+\infty[$

• g' موجبة على $[0;+\infty[$

II. 1 و **2** نستعمل قاعدة البرهان بالتراجع.

4. S_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\frac{1}{2}$.

T_n مجموع n حدا لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول $\frac{1}{4}$.

• $u_n>0$

• (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى

• الدالة ln مستمرة على $]0;+\infty[$

موضوع موجه

تنبيه

عندما نريد معرفة إشارة دالة نلجأ أحيانا إلى دراسة تغيراتها دون أن نحسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها كما هو الشأن في السؤال 1 من التمرين.
الهدف هنا هو توظيف هذه الإشارة لدراسة تغيرات دالة أخرى و هي الدالة المعرفة في السؤال 2 من التمرين.

تمرين:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $g(x)=(1-x)e^x-1$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج إشارة $g(x)$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \leq \frac{1}{1-x}$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $f(x)=e^x+\ln(1-x)$

أ- اشرح لماذا الدالة f معرفة على $]-\infty;1[$ ؟

ب- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند 1 .

جـ- ادرس تغيرات الدالة f. (يمكن استعمال نتائج السؤال 1)

د- ارسم بدقة المنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

توجيهات

1. **أ-** طبق عملية مشتق جداء دالتين.

ب- لمعرفة إشارة $g(x)$ ليس من الضروري حساب نهايات g عند $-\infty$ و عند 1.

و لا تنس تحديد القيم الحدية للدالة g .

2. **أ-** الدالة ln معرفة على $]0;+\infty[$.

3. **جـ -** إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $g(x)$ على $]-\infty;1[$.

د – ارسم المستقيمات المقاربة في حالة وجودها و أبرز القيم الحدية .

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

1 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

1) $f(x)=e^{-x}$ ؛ 2) $f(x)=e^{x^2+x}$ ؛

3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ؛ 4) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ ؛

5) $f(x)=\frac{1}{xe^x}$ ؛ 6) $f(x)=e^x-e^{-x}$.

2 بسط العبارات التاية:

1) $(e^x)^3\times e^{-5x}$ ، 2) $\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$ ، 3) $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$

3 بين من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

1) $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 2) $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$

3) $(e^x+e^{-x})^2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$ 4) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

4 u متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n=\frac{e^{n-1}}{e^n}$

• بين أن u متناقصة تماما.

5 حل في ℝ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}=1$ ، 2) $e^{-5x}=e$ ، 3) $e^x=e^{-2x}$

6 حل في ℝ المعادلتين التاليتين:

1) $e^{-x^2}=\frac{1}{e}$ 2) $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$

7 حل في ℝ المعادلات التالية:

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ ، 2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ 3) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$.

8 حل في ℝ المتراجحات التالية:

1) $e^{3x}\le 1$ ، 2) $e^x>e^2$ ، 3) $e^x<e^{-2x}$

9 حل في ℝ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x^2}\le e^{5x+3}$ 2) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ ،

3) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4 e^{-x}$ 4) $e^{x-x^2}\ge 1$

10 حل في ℝ المعادلة و المتراجحة التاليتين:

1) $\left(e^x-1\right)\left(e^x-e^2\right)=0$

2) $\left(e^x-1\right)\left(e^x-e^2\right)>0$

2 - الدوال الأسية $x\mapsto e^{kx}$

11 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على ℝ حيث:

1. $f'=3f$ و $f(0)=1$
2. $f'=-f$ و $f(0)=1$
3. $f'=\frac{1}{2}f$ و $f(0)=1$

12 f دالة قابلة للاشتقاق على ℝ حيث:

$f'=kf$ و $f(0)=\lambda$

مع k و λ عددان حقيقيان و $\lambda\neq 0$

لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g=\frac{1}{\lambda}f$

1. تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$
2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\lambda\exp(kx)$

13 في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على ℝ حيث:

1. $f'=-6f$ و $f(0)=-1$
2. $f'=-2f$ و $f(0)=\frac{1}{2}$
3. $f'=\sqrt{2}f$ و $f(0)=2$

14 f دالة قابلة للاشتقاق على ℝ حيث:

$f'=2f$ و $f(0)=1$.

بتطبيق طريقة أولر أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لِـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f باختيار خطوة h حيث:

1) $h=0,2$ ، 2) $h=0,1$

15 f دالة معرفة على ℝ و غير معدومة حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y)f(x)\times f(y)$

1. أ- بين أن $f(0)=1$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)\times f(-x)=1$

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$$

ب- استنتج إشارة الدالة f .

16 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y)f(x)\times f(y)$

1. أ- من أجل كل عدد حقيقي x، عبر عن $f(2x)$ ، $f(3x)$، $f(4x)$ بدلالة $f(x)$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x ،و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، خمّن عبارة $f(nx)$ بدلالة $f(x)$.

نقبل هذه النتيجة فيما يلي.

2.نضع $k=f(1)$. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

أ) $f(n)=k^n$ ، ب) $\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=k$

• استنتج $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{4}\right)$ بدلالة k .

3 - دراسة الدالة الأسية

17 ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

1) $f(x)=e^{-x}$ 2) $f(x)=2e^{2x}$

3) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ 4) $f(x)=x+e^{2x}$

18 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=1+e^{x}+e^{2x}$

ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

19 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

1.ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=e^{2x}\left(1-e^{-x}\right)$$

ب-استنتج نهاية f عند $+\infty$.

• في التمارين من **20** إلى **23** ادرس نهاية الدالة f عند a حيث a يمثل 0 أو $-\infty$ أو $+\infty$:

20 $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$

21 $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{2x}$ ، عند 0

22 $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(e^{3x}-1\right)$ ، عند 0 و عند $+\infty$.

23 $f(x)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$

(يمكنك وضع $X=\dfrac{1}{x}$)

24 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{2x}}{x}$

1. اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=e^{x}\times g(x)$.

2.استنتج نهاية الدالة f عند 0.

25 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

26 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=x-\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لمنحني الدالة f عند $+\infty$.

3.بين أن الدالة f فردية.

4.أ- استنتج $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- استنتج أن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

27 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x+1-e^{-x}$

1. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2. ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى D .

28 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x+2+3e^{-2x}$

بين أن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

• في التمارين من **29** إلى **36** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f على المجال I .

29 $f(x)=xe^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

30 $f(x)=(2x-3)e^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

31 $f(x)=\left(x^{2}+x+1\right)e^{x}$ ، $I=\mathbb{R}$

32 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ، $I=\mathbb{R}^*$

33 $f(x)=\dfrac{3e^x-2}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

34 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x}$ ، $I=\mathbb{R}$

35 $f(x)=(1+\cos x)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$

36 $f(x)=(e^x-1)(e^x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$

• في التمارين من **37** إلى **39** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

37 (1 $f(x)=e^{2x+3}$ (2 $f(x)=(-x-1)e^{-x}$

38 (1 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{x}{2}}}$ (2 $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$

39 (1 $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ (2 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

مساعدة: الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجموعة قابلية اشتقاق الدالة u و دالتها المشتقة هي: $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

40 باستعمال التقريب التآلفي لـ e^h من أجل h قريب من الصفر ، أعط قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

(1 $e^{0,1}$ (2 $\dfrac{1}{e^{0,002}}$ (3 $\dfrac{e^{1,999}}{e^2}$

41 1. ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني (C) الممثل للدالة $f:x\mapsto e^x$.

2.استنتج رسم منحنيات الدوال التالية:

أ) $f_1:x\mapsto e^x+1$ ب) $f_2:x\mapsto -e^x$

ج) $f_3:x\mapsto e^x-2$ د) $f_4:x\mapsto |e^x-2|$

42 إليك التمثيل البياني لأربعة منحنيات في معلم متعامد و متجانس

C_4 ، C_3 ، C_2 ، C_1 ، x ، y ، 0 ، 1

ارفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني:

$f:x\mapsto e^x$ ، $g:x\mapsto -e^x$ ،

$h:x\mapsto 1-e^x$ ، $k:x\mapsto 1+2e^x$

43 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+1+e^x$

1.ادرس تغيرات الدالة f .

2.ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3.شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة f .

44 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$

1.أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أ- بين أن المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المحني (C) بالنسبة للمستقيم D .

3.أرسم المستقيم D و المحني (C).

45 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$

1.بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

2.عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

46 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{4e^x+3}{2(e^x+1)}$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم

1.لماذا المستقيمان Δ و D اللذان معادلتاهما على الترتيب $y=\dfrac{3}{2}$ و $y=2$ مقاربان للمنحني (C)؟

2.أ- احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب-ادرس تغيرات f .

ج- ارسم Δ ، D و (C).

47 f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x+1}$

و (C) المنحني الممثل لها في معلم متعامد.

(انظر الشكل المقابل).

1. a عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$. اكتب معادلة المماس T_a للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها a.
2. بين أنه توجد قيمتين لـ a بحيث يكون المماس T_a يشمل مبدأ المعلم .

48 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x}-x-2$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. بين أن المنحى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-0,45<\alpha<-0,44$.
5. استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

49 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة f .

ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر النتائج هندسيا.

2) بين أن النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

3) عين معادلة المماس T للمنحنى (C) عند النقطة A .

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{(e^{x}-1)^{2}}{4(1+e^{x})^{2}}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g .

ج) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم T .

5) ارسم T و (C) .

50 إليك نص تمرين و الحل المقترح من قبل تلميذ.

أعد صياغة هذا الحل آخذاً بعين الاعتبار ملاحظات المصحح.

التمرين: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أ- ادرس تغيرات الدالة f .
   ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. ارسم في معلم متعامد ومتجانس منحنى الدالة f .

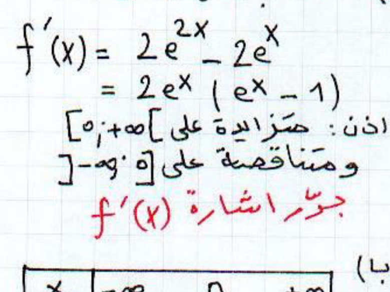
الحل المقترح:

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

علل هذه النتيجة

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $f(x)=e^{x}(e^{x}-2)$

(2 أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}$:



$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}$

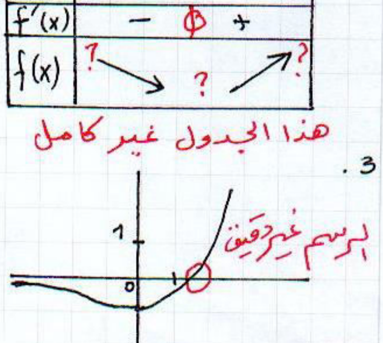
$=2e^{x}(e^{x}-1)$

اذن: متزايدة على $[0;+\infty[$

ومتناقصة على $]-\infty;0]$

برّر اشارة $f'(x)$

ب)



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	? ↘	?	↗ ?

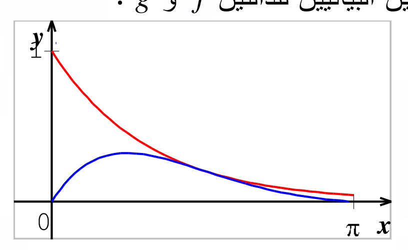
هذا الجدول غير كامل

3 .

51 f و g دالتان معرفتان على $[0;\pi]$ كما يلي:

$f(x)=e^{-x}\sin x$ و $g(x)=e^{-x}$

1. في الشكل الموالي و باستعمال راسم منحنيات مثلنا المنحنيين البيانيين للدالتين f و g .



• بين أن المنحنيين يشتركان في نقطة A .

2.بين أن المنحنيين يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

• في التمارين من **52** إلى **56** عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

52 (1 $f : x \mapsto \ln(x+1)$

(2 $f : x \mapsto \ln(-2x+3)$

(3 $f : x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

(4 $f : x \mapsto \ln|x|$.

53 (1 $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

(2 $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$

(3 $f : x \mapsto \ln(x+1)-\ln(x-2)$

(4 $f : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$.

54 (1 $f : x \mapsto \ln\sqrt{2-3x}$ ؛ (2 $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

(3 $f : x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$ ؛ (4 $f : x \mapsto \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$.

55 (1 $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ ؛ (2 $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ ؛

(3 $f : x \mapsto \frac{1}{x}-\ln x$ ؛ (4 $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

56 (1 $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x-1}$ ؛ (2 $f : x \mapsto \frac{x^2}{2\ln x+1}$

(3 $f : x \mapsto \frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x}$ ؛(4 $f : x \mapsto \ln|x+1|-\ln|x|$.

57 هل الدالتان f و g المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ و $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

متساويتين؟

58 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $\ln x = 2$ ، ب) $\ln x = -3$ ،

ج) $7\ln x = 2$ ، د) $\ln x + \ln 3 = 0$

59 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1 $\ln(2x-3)=\ln(x+4)$ ؛ (2 $\ln(x^2+x)=1$

(3 $\ln|1-x| = \ln 3$ ؛ (4 $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$.

60 نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$$

1) تحقق من أن $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

3) استنتج مجموعة حلول المعادلة :

$$-2(\ln x)^3+3(\ln x)^2+11\ln x-6=0$$

(4 $-2e^{3x}+3e^{2x}+11e^{x}-6=0$

61 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(1 $\ln x < 1$ ؛ (2 $\ln 2x > -1$ ؛

(3 $\ln(2x+3) < 5$ ؛ (4 $\ln(1-x) \le 2$ ؛

(5 $\ln x > \ln(2x-1)$ ؛ (6 $x\ln x - \ln x \ge 0$.

5 - الخواص الجبرية

62 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

(1 $\ln 14 - \ln 7$ ؛ (2 $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}$ ؛

(3 $\frac{\ln 100}{\ln 10}$ ؛ (4 $\ln(10000)+\ln(0,01)$ ؛

(5 $e^{\ln 5}+e^{-\ln 3}$ ؛ (6 $e^{1+\ln 2}$ ؛ (7 $e^{-2\ln 3}$.

63 بسط ما يلي :

• $A=\ln e^3-\ln e^2$ • $B=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

• $C=\ln 2+\ln(8e)-\ln(4e^2)$

• $D=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

64 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=3\ln 2-\ln 5+\frac{1}{2}\ln 8$

• $B=2\ln(0,1)-3\ln(0,01)+\ln 2$

• $C=2\ln(100)-\ln\left(\frac{1}{10}\right)$

65 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=\ln a-\ln b+2\ln c$

• $B=\frac{1}{2}\ln a-\frac{3}{2}\ln b+\ln\frac{a}{b}$

- $C=\ln(a+1)-\frac{1}{2}\ln b+\frac{3}{2}\ln(a+b)$

66 اكتب على شكل مجموع أو فرق ما يلي :

- $A=\ln(1400)$ • $B=\ln(2500000)$

67 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $2\ln(x-3)=\ln 4$

2) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$

3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

4) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

5) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$

6) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$

68 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$

2) $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$

3) $\ln x+\ln(x+1)\leq\ln(x^2-2x+2)$

4) $\ln(35-8x)\geq 3\ln 2+\ln(x)^2$

69 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$

1) $\ln x-\ln 3$ 2) $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x(\ln x-1)$ 4) $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$

70 نعتبر كثير الحدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$$p(x)=x^4-25x^2+144$$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$

2) استنتج حل المعادلتين:

أ) $(\ln x)^4-25(\ln x)^2+144=0$

ب) $[\ln(\ln x)]^4-25[\ln(\ln x)]^2+144=0$

71 نعتبر كثير الحدود $P(x)=4x^2-4x-3$

1) عين جذور $P(x)$.

2) استنتج حل المعادلتين التاليتين:

أ) $4(\ln x)^2-4\ln x-3=0$

ب) $\ln(4x-3)=\ln(x+3)-\ln x$

72 نعتبر كثير الحدود f للمتغير الحقيقي x حيث:

$$f(x)=2x^2-x-1$$

1) عين جذور $f(x)$

2) أ- حلل $2(\ln x)^2-\ln x-1$

ب- استنتج مجموعة الحلول في $\mathbb{R}$ للمتراجحة

$$2(\ln x)^2-\ln x-1\leq 0$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln x+\ln(2x-1)>0$

73 حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية:

1) $\begin{cases}x+y=60\\ \ln x+\ln y=\ln 1000\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$

74 بكالوريا

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول t التالية:

$$2t^2-5t+2=0$$

2. حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases}2e^{2x}-5e^{x}+2=0\\ e^{x}\times e^{y}=1\end{cases}$

75 بكالوريا

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

1. $e^{x+2}-e-2e^{-x}=0$

2. $\ln|2x+1|+\ln|x-1|=\ln 2$

76 عين أصغر عدد طبيعي n في الحالات التالية:

أ) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 0,02$ ب) $0,8^n\leq 0,01$

ج) $(1,2)^n\geq 1040$ د) $21000(1+0,035)^n\geq 30000$

77 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=2$ وأساسها $\frac{3}{2}$

ابتداءً من أية رتبة تكون حدود المتتالية أكبر من 10^5 ؟

6 ـ دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

78 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

ادرس نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

79 f دالة معرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\ln x}$$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

80 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=2(\ln x)^2-\ln x-3$$

1.ادرس نهاية الدالة f عند 0.

2.من اجل $x>1$، ضع $\ln x$ كعامل مشترك في $f(x)$ ،

ثم عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

• في التمرينين **81** و **82** ،احسب النهايات المطلوبة

81 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛ د) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x+5-\ln x$

82 • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3+\ln x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x^2)}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)\ln(-x)$

83 f دالة معرفة على $]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. بين انه من أجل كل $x>e$ ، $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}+1}{\dfrac{1}{\ln x}-1}$

2. عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

84 f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(\ln(x-1))$$

1. بين لماذا الدالة f معرفة من أجل كل $x>2$ ؟

2. باستعمال نهاية دالة مركبة ، عين نهايات الدالة f عند 2

و عند $+\infty$.

85 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ ؛

$\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$.

86 لتكن الدالة f المعرفة على □ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \ ; \ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$

بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

• في التمرينين **87** و **88** حدد مجموعة التعريف

و مجموعة قابلية الاشتقاق ثم احسب المشتقة $f'(x)$ للدوال

f المعطاة:

87 • $f(x)=x+\ln x$ • $f(x)=2x^2-\ln(x)$

• $f(x)=-x+\ln 2+\ln x$ • $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

• $f(x)=(\ln x)^2+\ln x-2$ • $f(x)=x\ln x$

• $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ • $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

88 • $f(x)=\ln(-2x-1)$

• $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln(1-x))^2$

• $f(x)=x(2-\ln x^2)$

• $f(x)=\ln(2x^2+x-6)$

• $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

• $f(x)=\dfrac{2x-1+\ln x}{x}$

مساعدة : مشتقة الدالة $f:x\mapsto \ln(u(x))$ هي الدالة

$$f':x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$$

89 تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال D

ثم احسب دالتها المشتقة:

1) $f(x)=(\ln x)^2+\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}$ ، $D=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x\ln|x|-2x+3$ ، $D=]-\infty;0[$

4) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+x\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x-1}$ ، $D=]e;+\infty[$

90 في كل حالة من الحالات التالية عين معادلة المماس

للمنحني الممثل للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ عند النقطة

التي فاصلتها x_0 .

1) $f(x)=-x+1+\ln x$ ؛ $x_0=e$

2) $f(x)=x^2-2+3\ln x$ ؛ $x_0=1$

3) $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+\frac{e}{\ln x}\right)$ ؛ $x_0=e$

91 لتكن الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$$
بين أن المنحنى C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

92 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ارسم المنحنى C الممثل للدالة $\ln$ ثم استنتج رسم المنحنى Γ الممثل للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=2-\ln x$$
– حدّد التحويل الهندسي المستعمل.

2) نفس السؤال من أجل $g(x)=\ln(x-1)+2$ على المجال $]1;+\infty[$.

93 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=2x+3+\ln x$$
بين أن الدالة f هي مجموع دالتين لهما نفس اتجاه التغير، واستنتج تغيرات f.

94 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=x^2-2+\ln x$$
1. ادرس تغيرات الدالة f بدون حساب المشتقة.
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f.

95 ادرس تغيرات الدالة f على المجال D وذلك باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين:

1) $f(x)=\ln(x-3)$ ؛ $D=]3;+\infty[$
2) $f(x)=\ln(1-x)$ ؛ $D=]-\infty;1[$
3) $f(x)=\ln(2x^2)$ ؛ $D=]0;+\infty[$
4) $f(x)=\ln|x-2|$ ؛ $D=]2;+\infty[$
5) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$ ؛ $D=]2;+\infty[$

• في التمرينين **96** و **97** و في كل حالة من الحالات ادرس تغيرات الدالة f على المجال D باستعمال المشتقة

96 1) $f(x)=-\frac{3}{2}x+\ln(2x)$ ؛ $D=]0;+\infty[$
2) $f(x)=2x-\ln(1-x)$ ؛ $D=]-\infty;1[$
3) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln(x-1)$ ؛ $D=]1;+\infty[$
4) $f(x)=2x+\ln x-\ln(x-1)$ ؛ $D=]1;3]$

97 1) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ؛ $D=]-\infty;0[$
2) $f(x)=x+1+\frac{\ln x}{x}$ ؛ $D=]0;+\infty[$
3) $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$ ؛ $D=]0;+\infty[$
4) $f(x)=\ln(1-x)+\ln(x+5)$ ؛ $D=]-5;1[$

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n=2^{1234}$
1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.
2. استنتج الحصر التالي: $10^{371}\leq n<10^{372}$.
3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n.

99 علما أن $\log(3,81)\approx 0,58092$ ، استنتج بدون باستعمال الحاسبة قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:
$\log(381)$ ، $\log(0,381)$ ، $\log(3,81\times 10^{-3})$.

100 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:
1) $\log x=5$ ؛ 2) $\log x=-3$ ؛ 3) $\log x=0,01$

101 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:
1) $\log x>4$ 2) $\log x<-10$
3) $\log x\geq 0,1$ 4) $\log x<\log(1-x)$

7- المعادلات التفاضلية

102 حل المعادلات التفاضلية التالية
1) $y'=3y$ 2) $y'+2y=0$
3) $2y'+5y=0$ 4) $\frac{1}{2}y'=4y$

103 1) حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=0$
2) عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4)=1$

104 f هي حل المعادلة التفاضلية $2y'+y-5=0$
هل المنحنى الممثل للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا

معادلته $y=\frac{5}{2}$ ؟

105 f هي الدالة المعرفة على ℝ بـ:

$$f(x)=3e^{-2x}-4$$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

106 f هي الدالة المعرفة على ℝ بـ: $f(x)=2e^{-5x}$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة .

107 نعتبر الدالة m المعرفة على $[0;+\infty[$ التي ترفق بالعدد t ، العدد $m(t)$ حيث $m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي(ماء+ملح)عند اللحظة t بالدقائق

نقبل أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية $(E):5y'+y=0$ و أن الشرط الابتدائي هو $m(0)=300$.

1.أ- حل المعادلة (E).

ب- بين أنه من أجل كل $t\in[0;+\infty[$ ، $m(t)=300e^{-\frac{t}{5}}$

2. عين العدد t_0 حيث $m(t_0)=150$.

3.نقبل أنه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلاّ إذا كان $m(t)\le 10^{-2}$.

ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح؟

تمارين للتعمق

108 لتكن الدالة f المعرفة على ℝ بـ:

$$f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية

(C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين a ، b و c بحيث يشمل المنحنى (C) النقطة O و الدالة المشتقة f' تنعدم من أجل $x=\ln\frac{3}{4}$ و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C).

2) نعتبر الدالة f المعرفة على ℝ بـ:

$$f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$$

أ) • احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟

• احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (يمكن وضع e^x كعامل مشترك)

•ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب)حدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

• عين معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها0.

ج) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

د) ارسم (C).

109 الهدف من هذا التمرين إثبات أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

أ- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}$$

1) احسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)

3) برر إذن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln x<\sqrt{x}$

ب- 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) عين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$.استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

110 نعتبر المعادلتين التفاضليتين:

$$(E_1):y'-2y=0 \quad و \quad (E_2):y'=y$$

1.أ- حل المعادلتين (E_1) و (E_2).

ب- • عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1)بحيث $f_1'(0)=4$

• عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2)بحيث $f_2(0)=1$.

2.لتكن الدالة g المعرفة على ℝ بـ $g(x)=2e^{2x}-e^{x}$

أ- ادرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب-استنتج وجود مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلته.

ج- احسب g' مشتقة الدالة g .

د-ادرس إشارة g' ثم شكل جدول تغيرات g.

3. حدد نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة g مع محوري الإحداثيات.

4. أنشئ المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد.

111 بكالوريا

الجزء1: نعتبر الدالة f المعرفة على $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\ln(1+2x)$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.

2. عين نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ: $g(x)=f(x)-x$

أ- ادرس تغيرات g على I.

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين: 0 و حل آخر نرمز له بـ α حيث $\alpha\in[1;2]$

ج- استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x\in I$.

4. بين انه من أجل كل $x\in\left]0;\alpha\right[$ ، $f(x)\in\left]0;\alpha\right[$

الجزء2: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـ:

$$u_{n+1}=f(u_n) \text{ و } u_0=1$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\in\left]0;\alpha\right[$

2. برهن بالتراجع أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

3. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

112 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f(x)=\ln(x)\times\ln(1-x);x\in\left]0;1\right[\end{cases}$$

نرمز بـ (C) إلى المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس الوحدة: $10cm$

نقبل أن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ ، وكذلك النتيجة التالية: من اجل $\alpha>0$ ، $\lim_{x\to 0} x^{\alpha}lnx=0$

1. أ- عين نهاية $\frac{\ln(1-x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ب- استنتج نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما يؤول x إلى 0.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

2. بين أنه من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$:

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

3. لتكن φ الدالة f المعرفة على $\left]0;1\right[$ كما يلي:

$$\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$$

أ- احسب $\varphi'(x)$ ، ثم بين المساواة التالية:

$$\varphi''(x)=\frac{2x-1}{x(1-x)}$$

استنتج تغيرات الدالة φ' على المجال $\left]0;1\right[$.

ب- بين أن φ' تنعدم عند قيمتين α_1 و α_2 على $\left]0;1\right[$ (لا نريد حساب هاتين القيمتين). أعط إشارة φ' على $\left]0;1\right[$.

ج- عين نهاية $\varphi(x)$ عندما يؤول x إلى 0 و نهاية $\varphi(x)$ عندما يؤول x إلى 1. احسب $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

- استنتج إشارة $\varphi(x)$ على المجال $\left]0;1\right[$.

4. أ- بين أن $f'(x)$ لها نفس إشارة $\varphi(x)$ على $\left]0;1\right[$.

ب- شكل جدول تغيرات f.

ج- بين أنه من أجل كل $x\in\left]0;1\right[$:

$$0<\ln(x)\times\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$$

د- ارسم (C)

113 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x-1}{x}\times\ln x$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ:

$$g(x)=x-1+\ln x$$

ب- تحقق أن $g(1)=0$. استنتج حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات f .

ج- ادرس نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

د- شكل جدول تغيرات f.

3.ارسم على شاشة الآلة الحاسبة ثم على الورقة المنحني (C).

114 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب-عين الدالة المشتقة للدالة f .

ج-ادرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيرات f .

2.أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C).

3.k عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x}-e^{x}+1-k=0$

أ) بالحساب. ب) باستعمال تغيرات الدالة f.

115 f دالة معرفة على $]-1;1[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1.أ-عين مشتقة الدالة f .

ب-استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;1[$.

2.أ- ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند 1 .

ب-استنتج وجود مستقيمات مقاربة للمنحني (C).

3.أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب-بين أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحني (C).

ج- أنشئ لمنحني (C) و المماس لـ(C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

4.أ- انطلاقا من الدراسة السابقة ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي y ، المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا واحدا.

ب-عبر بالحساب ، عن x بدلالة y .

ج- نرمز بـ(C') إلى المنحني الممثل للدالة.

اشرح لماذا المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ ؟

د-ارسم (C') في نفس المعلم السابق.

116 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=x+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1} \quad \text{و} \quad f(x)=x-1+\frac{2}{e^{x}+1}$$

ب-ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ج-بين أن المستقيمين Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ وَ $y=x-1$ مقاربان لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

د- حدد وضعية المنحني (C)بالنسبة إلى كل من Δ_1 و Δ_2 .

2.أ- بين أن الدالة f فردية.

ب- ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

3.ارسم Δ_1 ، Δ_2 ، المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 ، ثم المنحني (C).

117 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-2,2x+2,2\ln(x+1)$$

• مثل على شاشة الحاسبة البيانية المنحني البياني للدالة f باختيار النافذة: $-2\leq x\leq 4$ و $-5\leq y\leq 5$

• انقل على ورقتك شكل المنحني الذي تحصلت عليه.

2. حسب هذا التمثيل البياني ماذا يمكنك أن تخمن:

أ-بالنسبة لتغيرات الدالة f ؟

ب-بالنسبة لعدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3.نريد الآن دراسة الدالة f .

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب-ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند $+\infty$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- استنتج من هذه الدراسة عدد حلول المعادلة: $f(x)=0$.

د-هل نتائج السؤالين 3.أ و 3.ب تؤكد التخمين الذي وضعته في السؤال2؟

4.نريد أن نمثل على شاشة الحاسبة البيانية منحنى الدالة f على المجال $[0,1;0,2]$ لغرض المشاهدة.

أ- ما هي القيم الحدية للدالة f التي تقترحها حتى تكون مطابقة لنتائج السؤال3.ج على نافذة آلتك الحاسبة؟

ب- باستعمال الحاسبة عين قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للحل الأكبر α للمعادلة $f(x)=0$.

118 f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحققان الشروط الثلاثة التالية:

(1) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2=1$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=g'(x)$

(3) $f(0)=1$

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)\neq 0$

ب- احسب $g(0)$

2.باستعمال الشرط(1) و تطبيق الاشتقاق ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=f'(x)$

3.نضع $u=f+g$ و $v=f-g$

أ- احسب $u(0)$ و $v(0)$

ب- بين أن $u'=u$ و $v'=-v$

ج-عين الدالتين u و v .

4.استنتج عبارتي $f(x)$ و $g(x)$.

119 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

1.أ- ادرس نهاية f عند $+\infty$.

ب-بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى (C) .

ج- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم D .

2.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$:

$$f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$$

ب استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $f'(x)>0$

ج- حدّد $f'(0)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

3. أ- ارسم D و المنحنى (C) .

ب- عين النقطة A من (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم D .

120 **الجزء1:**

1. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(t)=e^t-t-1$$

ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$؟

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي t، $e^t\geq t+1$ و $e^t>t$

الجزء2: f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$$

ب- نقبل أن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ ، احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ- اشرح لماذا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(e^x-x-1)}{e^x-x}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(نقبل أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$)

3.في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة: $3cm$)، نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-2x$ وَ (C) المنحني الممثل للدالة f .أ- بين أن $f(x)-(x^2-2x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$.

• **عندما يكون $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)-f_2(x)=0$ ، نقول أن المنحنيين الممثلين للدالتين f_1 و f_2 متقاربان عند $+\infty$.**

ب- ادرس الوضعية النسبية لمنحنيين P و (C).

4.عين معادلة لكل من المماسين D و D' على الترتيب للمنحنيين P و (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

5.ارسم في نفس المعلم ، المنحنيين P و (C) و المماسين D و D' .

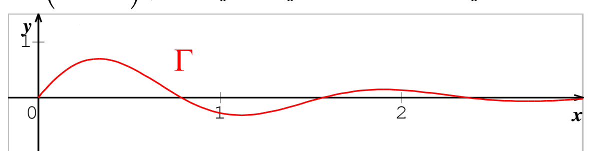
121 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=e^{-x}\cos(4x)$$

الشكل الموالي هو تمثيلها البياني Γ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$



نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=e^{-x}$

و نرمز بِ C إلى تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$$

ب- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين Γ و C .

3. نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و ادرس تقاربها.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$$

ب- استنتج أن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5.أعط قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T للمنحني Γ عند النقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{2}$

• أتمم الشكل السابق برسم المماس T و المنحني C .

مسائل

122 بكالوريا

الجزء1 : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2x-1)e^{-2x}$$

و نرمز بِ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ،الوحدة $2cm$.

1. أ-نقبل أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=0$.احسب نهاية f عند $+\infty$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C ؟

ب- احسب نهاية f عند $-\infty$.

2.احسب $f'(x)$ و ادرس إشارة f على $\mathbb{R}$

3.شكل جدول تغيرات f .

4.أ- عين إحداثيات النقطة A ، نقطة تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل.

ب-ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء:2

1.أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x)=4(2x-1)e^{-2x}$$

حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

ب- حل المعادلة $f''(x)=0$

2. لتكن B النقطة من المنحني (C) التي فاصلتها $\frac{1}{2}$.عين معادلة للمماس T للمنحني (C) عند B .

3.نريد دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T ، من أجل ذلك نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=f(x)=\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$$

أ- عين $g'(x)$ و $g''(x)$.

ب–ادرس إشارة $g''(x)$ حسب قيم x .

استنتج اتجاه تغير الدالة g' على $\mathbb{R}$.

ج– استنتج إشارة $g'(x)$ ثم اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

د– عين إذن إشارة $g(x)$ حسب قيم x. استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس T .

4. في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$، مثل النقطتين A و B ، ثم ارسم المماس T و المنحنى (C).

123 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}$$

Γ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. ادرس شفعية الدالة f. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى Γ؟

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $e^{-x}\le e^{x}$.

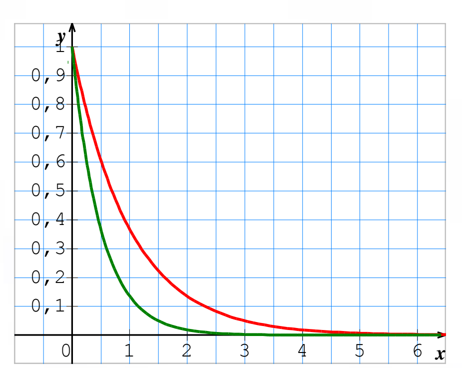
3. أ– عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب – ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

4. نعتبر الدالتين g و h المعرفتان على $[0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\frac{1}{e^{x}} \quad \text{و} \quad h(x)=\frac{1}{2e^{x}}$$

في الشكل الموالي مثلنا المنحنين البيانيين Γ_1 و Γ_2 للدالتين g و h على الترتيب في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$



أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$h(x)\le f(x)\le g(x)$.

ب– ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيات Γ ، Γ_1 و Γ_2؟

انقل الشكل السابق و ارسم في هذا الشكل المنحنى Γ محددا مماسه عند النقطة التي فاصلتها 0.

124 بكالوريا

الجزء1: نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$u(x)=2x^{3}-1+2\ln|x|$$

1. ادرس تغيرات الدالة u على $\mathbb{R}^*$.

2. ادرس نهايات الدالة u عند 0 و $+\infty$.

3. نعتبر المعادلة $u(x)=0$

أ– بين أن هذه المعادلة تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

ب– أعط حصرا بعددين كسريين للعدد α من الشكل $\frac{n}{10}$ و $\frac{n+1}{10}$ حيث n عدد طبيعي.

4. استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الجزء2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^{2}}$$

نرمز بِـ(C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس نهايات الدالة f عند 0 ، $-\infty$ و $+\infty$.

(نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^{2}}=0$)

2. احسب $f'(x)$.

3. ادرس اتجاه تغير لدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4. أ– بين أن $f(\alpha)=3\alpha-\frac{1}{2\alpha^{2}}$.

ب– باستعمال حصر α في الجزء1 –3) بين أن :

$1,6<f(\alpha)<2,1$ (لا يطلب رسم المنحنى (C))

الجزء3: لتكن النقطة $M(x;y)$ و $M'(x';y')$ حيث M' هي نظير M بالنسبة لمحور التراتيب.

1. عين x' و y' بدلالة x و y .

2. أ– بين أنه إذا كانت تتغير على المنحنى (C) فإن النقطة M' تتغير على المنحنى (Γ) الذي معادلته $y=-2x-\frac{\ln|x|}{x^{2}}$

ب– ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (Γ).

تمارين

125 بكالوريا

الجزء1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

و نرمز بِ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، الوحدة $2cm$.

1. ادرس شفعية الدالة f.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)؟
2. ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وتغيرات f على $[0;+\infty[$.
3. مثل المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء2: نعتبر النقطة A من المستوي إحداثياتها $(1;0)$، نهتم بأصغر مسافة AM حيث M نقطة من المنحنى (C).

1. لتكن M فاصلتها x. عين بدلالة x المسافة AM.
2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=(x-1)^{2}+\frac{(e^{x}-e^{-x})^{2}}{2}$$

أ- احسب $g'(x)$

ب-احسب $g''(x)$ حيث g'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة g

• بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g''(x)=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

ج-استنتج تغيرات الدالة g' على $\mathbb{R}$.

د- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;1]$ يحقق $g'(\alpha)=0$ ، ثم تحقق أن $0,46<\alpha<0,47$

• عين إشارة $g'(x)$ حسب قيم x .

هـ- ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ (لا يطلب حساب النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$).ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$؟

3. نقبل أن المسافة AM تكون صغرى عند النقطة M_{α} من المنحنى (C) التي فاصلتها α.

مثل النقطة M_{α} في الشكل.

4. باستعمال بين أن:

$$\alpha-1=-\frac{1}{2}f(2\alpha)$$

ثم
$$g(\alpha)=\frac{1}{4}[f(2\alpha)]^{2}+[f(\alpha)]^{2}$$

استعمل تغيرات f و النتيجة $0,46<\alpha<0,47$ لحصر العدد $g(\alpha)$ ، استنتج حصرا للمسافة AM_{α} سعته 2×10^{-2} .

126 بكالوريا

الهدف من هذه المسألة هو دراسة تغيرات الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$

الجزء1:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$$

أ) نقبل أن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$.استنتج نهاية $g(x)$ لما x يؤول إلى 1.

ب) احسب $g'(x)$ من أجل x ينتمي إلى المجال $]1;+\infty[$.

ج) حل في المجال $]1;+\infty[$ المتراجحة:

$$1-\ln(x-1)>0$$

د) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]1;+\infty[$.

هـ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $[e+1;e^{3}+1]$ و ادرس إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]1;\alpha[$ و $]\alpha;+\infty[$.

2. φ هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\frac{\ln(x^{2}-1)}{x}$$

أ) ادرس نهاية الدالة φ عند 1.نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

ب) احسب $\varphi'(x)$ و بين أن إشارة $\varphi'(x)$ هي نفس إشارة $g(x^{2})$ على المجال $]1;+\infty[$.

ج) بين أن φ متزايدة على المجال $]1;\sqrt{\alpha}[$ و متناقصة على المجال $]\sqrt{\alpha};+\infty[$.

الجزء2:

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)=\varphi(e^{x})$$

2. استنتج: أ) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى 0.

ب) نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

ج) اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. بين من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4. انقل الجدول التالي و أتممه معطيا القيم مقربة إلى $0,01$

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. مثل بيانيا الدالة f في معلم متعامد حيث وحدة الأطوال $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور التراتيب. نأخذ 10 كقيمة مقربة للعدد α.

127 من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما k ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f_k(x)=\ln(e^x+kx)-x$$

نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $5cm$ على محور الواصل و $10cm$ على محور التراتيب.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g (لا يطلب حساب النهايات).

ب-استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب a ،

$$\ln(a+1)\leq a$$

2. أ- احسب $f_1'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_1 .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$$

جـ- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.عين $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

3. أ- احسب $f_k'(x)$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة f_k .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$$

جـ-استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

د- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

$$f_k(x)\leq\frac{k}{e}$$

4. حدّد معادلة المماس T_k للمنحنى $\mathcal{C}_k$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p<m$ ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_p$ و $\mathcal{C}_m$.

6. ارسم T_1 ، T_2 ، $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ ،

128 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+x\ln(x+2)$$

نرمز بـ $\mathcal{C}_f$ إلى منحني الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال $4cm$.

الجزء1: دراسة تغيرات الدالة f

1. أ- f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f و f'' هي دالتها المشتقة الثانية. احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$.

ب- ادرس تغيرات f' على المجال $]-2;+\infty[$.

جـ- عين نهايات f' عند -2 و عند $+\infty$.

2. أ- بين أنه على المجال $]-2;+\infty[$ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا واحدا α ينتمي إلى المجال $[-0,6;-0,5]$ ..

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x .

3. أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$.

ب- عين نهايات f عند -2 و عند $+\infty$.

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء2: وضعية المنحني $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى مماساته.

ليكن x_0 عدد حقيقي من المجال $]-2;+\infty[$. نسمي T_{x_0} المماس لـ $\mathcal{C}_f$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 .

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$ ، نضع:

$$d(x)=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$$

1. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$ ،

$$d'(x)=f'(x)-f'(x_0)$$

ب- مستعملا تزايد الدالة f' ، أعط إشارة $d'(x)$ حسب قيم x . استنتج تغيرات d على المجال $]-2;+\infty[$.

2. عين الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و T_{x_0} .

الجزء 3: رسم المنحني

1. عين معادلة للمستقيم T_0 ، مماس المنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة التي فاصلتها 0، ارسم T_0 .

2. جد الأعداد الحقيقية x_0 بحيث تكون المماسات تمر بالمبدأ ثم ارسم هذه المستقيمات.

3. ارسم المنحني $\mathcal{C}_f$ من أجل قيم x المحصورة بين -1 و 2. نأخذ $\alpha\approx-0,54$ و $f(\alpha)\approx0,8$.

اختيار من متعدد

129 اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة لكل سؤال.

.1 المعادلة $e^{2x}-3e^{x}-4=0$ تقبل في $\mathbb{R}$:

1) 0 حلا . 2) حلا واحدا. 3) حلين. 4) حلين على الأكثر

.2 العبارة $-e^{-x}$:

1) لا تكن أبدا سالبة   2) سالبة دائما

3) سالبة إذا كان x موجب   4) سالبة إذا كان x سالب

.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=$

1) $-\dfrac{1}{2}$ 2) 1   3) 2   4) $+\infty$

.4 المعادلة التفاضلية $y=2y'-1$ تقبل كمجموعة حلول:

1) $x\mapsto ke^{2x}-1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

2) $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}+1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

3) $x\mapsto ke^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث $k\in\mathbb{R}$

4) $x\mapsto ke^{2x}+\dfrac{1}{2}$ حيث $k\in\mathbb{R}$

130 لكل سؤال عين الإجابة(أو الأجوبة) الصحيحة

.1 لتكن الدوال f ، g و h للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$f(x)=\ln(x-2)$ ، $g(x)=\ln(x^2+1)$ ، $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

أ) $f(x)$ و $g(x)$ لهما معنى من أجل كل عدد حقيقي x .

ب) $h(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

ج) $f(3)=0$.

د) $h(e)=e$.

هـ) من أجل كل $x>2$: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ln\dfrac{x-2}{x^2+1}$

.2 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)=x^2+2+2\ln x$

ب) على $]0;+\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x-1$.

ج) على $]0;+\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.

د) f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

هـ) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha\in]1;2[$

أصحيح أم خاطئ ؟

131 هل العبارات التالية صحيحة أو خاطئة؟ برّر الجواب

1) الدالة $f:x\mapsto\ln(2-x)$ معرفة على $]2;+\infty[$

2) الدالة $f:x\mapsto\ln(-2x)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

3) إذا كانت $f(x)=\ln(3-3x)$ على $]-\infty;1[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

4) إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و موجبة على مجال D فإن $\ln f$ متناقصة على D .

5) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و موجبة على مجال D فإن $(\ln|f|)'=-\dfrac{f'}{f}$

6) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^2\ln x$ العدد المشتق للدالة f عند e هو $3e$

132 اذكر دون تبرير إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة.

1) الدالة $\ln$ موجبة تماما على $]1;+\infty[$.

2) الدالة $f:x\mapsto\ln[-x(x+1)]$ معرفة على $]-1;0[$.

3) الدالة $f:x\mapsto\ln(x^2-1)$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

4) المعادلة $\ln x^2=\ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

5) إذا كانت $f(x)=x\ln x$ فإن $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$

6) المتراجحة $1+\ln(2-x)\geq 0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]-\infty;2[$.

133 حدّد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة ، برّر الأجوبة.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$.

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\times f(-x)\leq 0$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\leq e^{-1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

5) الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x=1$.

6) الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=-y$.